R08 Calculer :

$$A=\sum_{k=0}^{9}\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)\quad\text{et}\quad B=\sum_{k=0}^{9}\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)$$

Corrigé

Recherche

Les expressions se ressemblant, l'une avec un cosinus et l'autre un sinus, on peut tenter de simplifier $A+iB$…

On a :

$$\begin{aligned}
&A+iB\\
&=\sum_{k=0}^{9}\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)+i\sum_{k=0}^{9}\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{9}\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)+\sum_{k=0}^{9}i\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{9}\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{9}e^{i\frac{k\pi}{5}}\\
&=\sum_{k=0}^{9}\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^{k}\\
&=\frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^{10}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\\
&=\frac{1-e^{i\frac{\pi}{5}\times 10}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\\
&=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\\
&=\frac{1-(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\\
&=\frac{1-(1+i\times 0)}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}\\
&=0
\end{aligned}$$

On a donc : $A=\mathrm{Re}(0)=0$ et $B=\mathrm{Im}(0)=0$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{A=B=0}$$